О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ПОЛУМОДУЛЕЙ И МОДУЛЕЙ

Ф. ГЕЧЕГ (Сегед)*)

Профессору Б. Секефальви-Надь к пятидесятилетию со дня рождения

Введение

Известно (см. [2]), что тем примитивным классам универсальных алгебр, в которых прямые и свободные произведения совпадают, можно поставить в соответствие некоторое полукольцо с единицей, однозначно определенное с точностью до изоморфизма, которое может рассматриваться, как область операторов данного класса. Аналогично, любому примитивному классу абелевых Ω-групп соответствует некоторое вполне определенное кольцо с единицей [1]. В настоящий работе мы выясним строение колец, соответствующих некоторым конкретным примитивным классам указанных видов. В заключительной части даются признаки относительно эквациональной полноты исследованных классов.

§ 1

Будем предполагать, что для читателя знакомы обозначения, определения и результаты работ [1] и [2]. Сейчас для удобства мы напомним некоторые из них, а также приводим дальнейшие обозначения и определения.

Подкласс $\mathfrak{B}$ примитивного класса $\mathfrak{A}$, образующий примитивный класс относительно операций того же класса, называется примитивным подклассом класса $\mathfrak{A}$. Множество всех тождеств примитивного класса $\mathfrak{A}$ мы обозначим через $\Lambda(\mathfrak{A})$.

Пусть R — произвольное кольцо. Примитивный класс всех правых модулей над R обозначается через $\mathfrak{M}^{\mathsf{R}}$, а при наличии единичного элемента в R для примитивного класса всех правых унитарных R-модулей мы будем пользоватся обозначением $\mathfrak{M}_1^{\mathsf{R}}$. Если M является модулем над кольцами R и L, то оно называется бимодулем над R и L. Примитивный класс всех M,

*) F. GÉCSEG (Szeged)

являющихся одновременно левым R- и правым L-модулем, обозначается через ${}^{R}\mathfrak{M}^{L}$, а в случае унитарности операторных областей R и L — через ${}^{R}\mathfrak{M}^{L}_{1}$.

Очевидно, $\mathfrak{M}^{R}$, $\mathfrak{M}^{R}_{1}$, ${}^{R}\mathfrak{M}^{L}$ и ${}^{R}\mathfrak{M}^{L}_{1}$ — примитивные классы абелевых Ω-групп (см. [5], [1]).

Согласно теореме 2 из [1] каждому примитивному классу $\mathfrak{A}$ абелевых Ω-групп соответствует кольцо R с единицей, определенное с точностью до изоморфизма, с таким свойством, что $\mathfrak{M}^{R}_{1}$ эквивалентен классу $\mathfrak{A}$. В дальнейшем R называется кольцом, соответствующим классу $\mathfrak{A}$.

Под тензорным произведением колец R и L мы будем понимать кольцо $R\otimes L$, состоящее из элементов $\sum_{i=1}^{k} r_i\otimes s_i$ $(k=1, 2, \ldots;\ r_i\in R,\ s_i\in L)$, где кольцевые операции производятся следующим образом: $\sum_{i=1}^{k} r_i\otimes s_i+\sum_{l=k+1}^{k+m=n} r_l\otimes s_l=$ $=\sum_{j=1}^{n} r_j\otimes s_j$; $\left(\sum_i r_i\otimes s_i\right)\left(\sum_j r'_j\otimes s'_j\right)=\sum_{i,j} r_ir'_j\otimes s_is'_j$ и выполняются следующие тождественные определяющие соотнощения:

$$(\alpha)\qquad (r_1+r_2)\otimes s=r_1\otimes s+r_2\otimes s \qquad (r_1, r_2\in R;\ s\in L),$$

$$(\beta)\qquad r\otimes(s_1+s_2)=r\otimes s_1+r\otimes s_2 \qquad (r\in R;\ s_1, s_2\in L),$$

$$(\gamma)\qquad 0\otimes s=r\otimes 0.$$

Если P и T — полукольца [2], то $\mathfrak{N}^{P^*}$ означает примитивный класс всех P-полумодулей; а в унитарном случае применяется обозначение $\mathfrak{N}^{P}$. Естественным путем определяются биполумодули, для которых мы вводим обозначение ${}^{P}\mathfrak{N}^{T}$, соотв. ${}^{P}\mathfrak{N}^{T}_{1}$. Методом А. А. Терехова ([3], [1]) можно показать, что для всех этих классов выполняются условия:

I. Существование нульместной операции, отмечанный которой элемент образует подалгебру во всех алгебрах данного класса.

II. Совпадание прямого и свободного произведений двух произвольных алгебр в данном классе.

По теореме 1 из [2] примитивный класс $\mathfrak{B}$, удовлетворяющий условиям I и II, эквивалентен примитивному классу всех правых унитарных полумодулей над некоторым вполне определенным полукольцом P с единицей, которое мы будем называть полукольцом, соответствующим классу $\mathfrak{B}$.

Тензорное произведение полуколец определяется аналогично случаю колец.

I означает кольцо целых рациональных чисел, а I^* — полукольцо с нулем натуральных чисел. Через $(I+R)$ мы обозначим известное расширение Доро кольца R при помощи I (см. [8], [4]). Вполне аналогично определяется (I^*+R).

Сопоставим пару $[m, k]$ той конгруэнции I^*, в которой m — наименьшее число конгруэнтное отличному от него числу, а $m+k$ — наименьшее среди чисел, конгруэнтных m, но отличных от него ($m=0, 1, 2, \ldots$; $k=1, 2, \ldots$). Легко убедиться, что это соответствие взаимно однозначно.

В дальнейшем буквы R и L означают кольца, или же полукольца в соответствие тому, являются-ли они областями операторов модулей, или же полумодулей.

Примитивный класс $\mathfrak{A}$ алгебр называется эквационально полным [6], если прибавляя к множеству всех его тождеств хоть одно новое тождество, полученная система тождеств выполняется лишь в тривиальном (состоящем из единственной одноэлементной алгебры) примитивном подклассе класса $\mathfrak{A}$.

§2

Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторый примитивный класс полумодулей, а R — соответствующее ему полукольцо. Имеет место

Лемма 2.1. *Примитивный класс $\mathfrak{F}$ имеет нетривиальный примитивный подкласс тогда и только тогда, если R обладает нетривиальной конгруенцией. Между примитивными подклассами $\mathfrak{F}'$ класса $\mathfrak{F}$ и конгруэнциями $\mathfrak{C}'$ полукольца R можно установить взаимно однозначное соответствие ($\mathfrak{F}' \to \mathfrak{C}'$) так, что примитивный класс всех правых унитарных полумодулей над фактор-полукольцом по $\mathfrak{C}'$ эквивалентен классу $\mathfrak{F}'$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}'$ — примитивный подкласс класса $\mathfrak{F}$. В случае $\mathfrak{F}'=\mathfrak{F}$ классу полумодулей $\mathfrak{F}'$ ставится в соответствие конгруэнция $\mathfrak{C}_0$ полукольна R, классы которой суть отдельные элементы. Если $\mathfrak{F}'=0$, то классу $\mathfrak{F}'$ соответствует конгруэнция $\mathfrak{C}_1$ полукольца R, единственным классом которой является само R. В оставшемся случае, если $\mathfrak{F}' \subset \mathfrak{F}$, то $\Lambda(\mathfrak{F}) \subset \Lambda(\mathfrak{F})'$. т. е. в подклассе $\mathfrak{F}'$ имеет место некоторое тождество $x_1 \ldots x_m \mu = x_1 \ldots x_m \nu$, не принадлежащее $\Lambda(\mathfrak{F})$. Имеют место разложения $x_1 \ldots x_m \mu = x_1 \mu_1 + \ldots + x_m \mu_m$ и $x_1 \ldots x_m \nu = x_1 \nu_1 + \ldots + x_m \nu_m$. Подставляя $x_i = x$, $x_j = 0$ ($i \neq j$; $i, j = 1, 2, \ldots, m$) мы получим $x\mu_i = x\nu_i$. Пусть теперь φ — взаимно однозначное отображение операций класса $\mathfrak{F}$ на операции класса $\mathfrak{N}_1^{\mathrm{R}}$, при котором тождества класса $\mathfrak{F}$ и только они переидут в тождества класса $\mathfrak{N}_1^{\mathrm{R}}$. Рассмотрим следующее разбиение $\mathfrak{C}'$ полукольца R: $r_1, r_2 (\in \mathrm{R})$ содержатся в одном и том же классе тогда и только тогда, если $x(r_1\varphi^{-1}) = x(r_2\varphi^{-1})$ — тождество в $\mathfrak{F}$. Очевидно, $\mathfrak{C}'$ является конгруэнцией.

С другой стороны, пусть $\mathfrak{C}'$ — некоторая нетривиальная конгруэнция полукольца R, и пусть $\mathfrak{F}'$ состоит из всех тех алгебр класса $\mathfrak{F}$, в которых тождества $x\mu_i = x\nu_i$ выполняются каждый раз, когда $\mu_i\varphi$ и $\nu_i\varphi$ содержатся в одном и том же классе конгруэнции $\mathfrak{C}'$. $\mathfrak{C}' \to \mathfrak{F}'$ и есть требуемое взаимно однозначное соответствие между конгруэнциями R и примитивными подклассами $\mathfrak{F}$, а примитивный класс всех правых унитарных полумодулей над фактор-полукольцом по $\mathfrak{C}'$ эквивалентен классу $\mathfrak{F}'$.

Обозначим через $\mathfrak{M}$ примитивный класс абелевых Ω-групп, а R — соответствующее ему кольцо. Такими же рассуждениями получается

Лемма 2.2. Класс $\mathfrak{M}$ имеет нетривиальный примитивный подкласс тогда и только тогда, если кольцо R обладает нетривиальным идеалом. Можно установить взаимно однозначное соответствие между подклассами $\mathfrak{M}'$ класса $\mathfrak{M}$ и идеалами N кольца R так, что примитивный класс всех правых унитарных модулей над фактор-кольцом по N эквивалентен классу $\mathfrak{M}'$.

С помощью лемм 2.1 и 2.2 можно определить полукольца, соответствующие примитивным подклассам класса $\mathfrak{F}$ всех коммутативных полугрупп с единицей и кольца, соответствующие примитивным подклассам класса $\mathfrak{A}$ всех абелевых групп.

Класс $\mathfrak{F}$ есть не что иное, как примитивный класс $\mathfrak{N}^0$ всех правых полумодулей над полукольцом I^*. Результаты следующего параграфа показывают (но и непосредственно легко видеть), что $\mathfrak{N}^0$ эквивалентен примитивному классу $\mathfrak{N}_1^{I^*}$. Конгруэнции полукольца I^* определяются парами $[m, k]$ (см. § 1). Так как $\mathfrak{N}^0 \sim \mathfrak{N}_1^{I^*}$, то по лемме 2.1 для произвольного примитивного подкласса $\mathfrak{N}'$ класса $\mathfrak{N}^0$ существуют такие числа m и k ($m=0, 1, 2, \ldots$; $k=1, 2, \ldots$), что $\mathfrak{N}'$ является классом всех коммутативных полугрупп с единицей, удовлетворяющих тождеству $x^m = x^{m+k}$.

Класс $\mathfrak{A}$ является примитивным классом $\mathfrak{M}^0$ всех правых модулей над кольцом I. Легко видеть, что $\mathfrak{M}^0 \sim \mathfrak{M}_1^I$. Так как все фактор-кольца кольца I имеют вид $I/\{k\}$, всякий примитивный подкласс класса $\mathfrak{A}$ является классом всех абелевых групп экспонента k, где k — подходящее натуральное число.

Мы видим, что в обоих случаях определены и полукольца (соотв. кольца), соответствующие примитивным подклассам.

§ 3

Теперь посмотрим примитивные классы $\mathfrak{N}^{\mathrm{R}}$ и $\mathfrak{M}^{\mathrm{R}}$, где R — произвольное. Покажем, что имеет место следующая

Теорема 3.1. Примитивный класс $\mathfrak{N}^{\mathrm{R}}$ эквивалентен примитивному классу $\mathfrak{N}_1^{(I^*+\mathrm{R})}$ ($\mathfrak{N}^{\mathrm{R}} \sim \mathfrak{N}_1^{(I^*+\mathrm{R})}$).

Доказательство. Пусть μ — m-местная операция ($m>0$) в классе $\mathfrak{N}^{\mathrm{R}}$. μ разлагается в одноместные операции: $x_1 \ldots x_m \mu = x_1\mu_1 + \ldots + x_m\mu_m$. Методом индукции можно показать (см. [1]), что произвольная одноместная операция μ_k в классе $\mathfrak{N}^{\mathrm{R}}$ имеет вид: $x_k\mu_k = x_k(r_k+n_k)$, где $r_k \in \mathrm{R}$, $n_k \in I^*$. Так, $x_1 \ldots x_m \mu = x_1(r_1+n_1)+\ldots+x_m(r_m+n_m)$. Обший вид операций в классе $\mathfrak{N}_1^{(I^*+\mathrm{R})}$ следующий: $x_1 \ldots x_m \mu' = x_1\langle n_1, r_1\rangle+\ldots+x_m\langle n_m, r_m\rangle$ $(n_i \in I^*,\ r_i \in \mathrm{R};\ i=1, 2, \ldots, m)$. Возьмем следующее отображение φ множества $O(\mathfrak{N}^{\mathrm{R}})$ на $O(\mathfrak{N}^{(I^*+\mathrm{R})})$: $\mu\varphi=\mu'$ и $0\varphi=\mathbf{0}$. Покажем, что φ — взаимно однозначно. Если $x_1 \ldots x_m \mu = x_1 \ldots x_m \nu$ то $x_1(r_1+n_1)+\ldots+x_m(r_m+n_m) = x_1(r_1'+n_1')+\ldots+x_m(r_m'+n_m')$ и, подставляя $x_i=x$, $x_j=0$ $(i \neq j;\ i, j=1, 2, \ldots, m)$, мы получим $x(r_i+n_i)=x(r_i'+n_i')$. Покажем, что $\langle n_i, r_i\rangle = \langle n_i', r_i'\rangle$, т. е. $n_i=n_i'$ и $r_i=r_i'$. Действительно, само полукольцо R является правосторонней областью операторов полугруппы $(I^*+\mathrm{R})^+$ полукольца $(I^*+\mathrm{R})$:

$$\langle n, r\rangle r_1 = \langle n, r\rangle\langle 0, r_1\rangle \quad (\langle n, r\rangle \in (I^*+\mathrm{R});\ r_1 \in \mathrm{R}).$$

В этом случае $\langle n, r\rangle(r_1+n_1)=\langle n, r\rangle\langle n_1, r_1\rangle$. Тождество $x(r_i+n_i)=x(r_i'+n_i')$ в случае $x=\langle 1, 0\rangle$ дает искомый результат. Этим однозначность φ показана.

С другой стороны, если $\mu\varphi=\nu\varphi$, то, учитывая, что φ переводит m-местную операцию в m-местную же, получим:

$$x_1\langle n_1, r_1\rangle+\ldots+x_m\langle n_m, r_m\rangle = x_1\langle n_1', r_1'\rangle+\ldots+x_m\langle n_m', r_m'\rangle,$$

откуда, подставляя $x_i=x$, $x_j=0$ $(i \neq j;\ i, j=1, 2, \ldots, m)$: $\langle n_i, r_i\rangle=\langle n_i', r_i'\rangle$, значит $n_i=n_i'$, $r_i=r_i'$.

При отображении φ тождества класса $\mathfrak{N}^{\mathrm{R}}$ и только они переходят в тождества класса $\mathfrak{N}_1^{(I^*+\mathrm{R})}$. Это показывается таким же путем, как это было сделано при доказательстве эквивалентности абелевых Ω-групп и правых унитарных модулей (см. [1] теорему 1). Этим утверждение доказано.

Для модулей над кольцом аналогично получается

Теорема 3.2. *Примитивный класс $\mathfrak{M}^{\mathrm{R}}$ эквивалентен примитивному классу $\mathfrak{M}_1^{(I+\mathrm{R})}$ $(\mathfrak{M}^{\mathrm{R}} \sim \mathfrak{M}_1^{(I+\mathrm{R})})$.*

Следствие 3.1. *Пусть R — произвольное полукольцо с единицей. Существует фактор-полукольцо полукольца $(I^*+\mathrm{R})$, изоморфное полукольцу R.*

Доказательство. Примитивный класс $\mathfrak{N}_1^{\mathrm{R}}$ является примитивным подклассом класса $\mathfrak{N}^{\mathrm{R}}$. Однако $\mathfrak{N}^{\mathrm{R}} \sim \mathfrak{N}_1^{(I^*+\mathrm{R})}$, так что по лемме 2.1 существует фактор-полукольцо полукольца $(I^*+\mathrm{R})$, примитивный класс полумодулей над которым эквивалентен примитивному классу $\mathfrak{N}_1^{\mathrm{R}}$. По теореме 1 из [2] это полукольцо с единицей является единственным с точностью до изоморфизма, что завершает доказательство.

По теореме 3.2 аналогично получим

Следствие 3.2. *Пусть R — произвольное кольцо с единицей. Тогда существует фактор-кольцо кольца $(I+\mathrm{R})$, изоморфное* кольцу R. (Это фактор-кольцо является фактор-кольцом по идеалу, порождаемому элементом $\langle 1, -\varepsilon\rangle$, где ε — единица кольца R).

Заметим, что А. Кертес в работе [7] показал возможность рассмотрения любого модуля над произвольным кольцом в качестве унитарного модуля над кольцом с единицей. Теорема 3.2 является естественным обобщением этого результата для примитивных классов. Далее, результаты следующего параграфа тоже являются обобщениями некоторых результатов Кертеса.

§ 4

Легко убедиться, что, если полукольцо R служит правой областью операторов для полумодуля F, то его антиизоморфный образ $\bar{\mathsf{R}}$ можно рассматривать левой областью операторов F так, чтобы при этом результаты применений образов и прообразов совпадали. Соответствующее утверждение имеет место также для модулей над кольцом. Эти замечания дают нам возможность ограничиться рассмотрением случаев ${}^{\mathsf{R}}\mathfrak{N}^{\mathsf{L}}$, соотв. ${}^{\mathsf{R}}\mathfrak{M}^{\mathsf{L}}$.

Имеет место следующая

Теорема 4.1. *Примитивный класс ${}^{\mathsf{R}}\mathfrak{N}^{\mathsf{L}}$ эквивалентен примитивному классу $\mathfrak{N}_1^{(I^*+\bar{\mathsf{R}})\otimes(I^*+\mathsf{L})}$ (${}^{\mathsf{R}}\mathfrak{N}^{\mathsf{L}}\sim\mathfrak{N}^{(I^*+\bar{\mathsf{R}})\otimes(I^*+\mathsf{L})}$).*

Доказательство. Если μ — m-местная операция ($m>0$) в классе ${}^{\mathsf{R}}\mathfrak{N}^{\mathsf{L}}$, то она разлагается в одноместные операции: $x_1\ldots x_m\mu=x_1\mu_1+\ldots+x_m\mu_m$. Произвольная одноместная операция μ_i в классе ${}^{\mathsf{R}}\mathfrak{N}^{\mathsf{L}}$ имеет вид:

$$x_i\mu_i=(r_{i,1}+n_{i,1})x_i(s_{i,1}+n'_{i,1})+\ldots+(r_{i,k_i}+n_{i,k_i})x_i(s_{i,k_i}+n'_{i,k_i}).$$

В классе $\mathfrak{N}_1^{(I^*+\bar{\mathsf{R}})\otimes(I^*+\mathsf{L})}$ общий вид операций следующий:

$$\begin{aligned}x_1\ldots x_m\mu'=&\,x_1\left(\langle n_{1,1},\bar{r}_{1,1}\rangle\otimes\langle n'_{1,1},s_{1,1}\rangle+\ldots+\langle n_{1,k_1},\bar{r}_{1,k_1}\rangle\otimes\langle n'_{1,k_1},s_{1,k_1}\rangle\right)+\ldots\\ &\vdots\\ &+x_m\left(\langle n_{m,1},\bar{r}_{m,1}\rangle\otimes\langle n'_{m,1},s_{m,1}\rangle+\ldots+\langle n_{m,k_m},\bar{r}_{m,k_m}\rangle\otimes\langle n'_{m,k_m},s_{m,k_m}\rangle\right).\end{aligned}$$

Возьмем следующее отображение φ множества операторов $O({}^{\mathsf{R}}\mathfrak{N}^{\mathsf{L}})$ на $O(\mathfrak{N}_1^{(I^*+\bar{\mathsf{R}})\otimes(I^*+\mathsf{L})})$: $\mu\varphi=\mu'$ и $0\varphi=\mathbf{0}$. Покажем, что φ — взаимно однозначно. Если $x_1\ldots x_m\mu=x_1\ldots x_m\nu$, где

$$\begin{aligned}x_1\ldots x_m\nu=&\,(r^*_{1,1}+n^*_{1,1})x_1(s^*_{1,1}+n^{*\prime}_{1,1})+\ldots+(r^*_{1,k_1}+n^*_{1,k_1})x_1(s^*_{1,k_1}+n^{*\prime}_{1,k_1})+\ldots\\ &\vdots\\ &+(r^*_{m,1}+n^*_{m,1})x_m(s^*_{m,1}+n^{*\prime}_{m,1})+\ldots+(r^*_{m,k_m}+n^*_{m,k_m})x_m(s^*_{m,k_m}+n^{*\prime}_{m,k_m}),\end{aligned}$$

то подставляя $x_i=x$, $x_j=0$ ($i\neq j$; $i,j=1,2,\ldots m$), получим

$$\begin{aligned}(1)\qquad &(r_{i,1}+n_{i,1})x(s_{i,1}+n'_{i,1})+\ldots+(r_{i,k_i}+n_{i,k_i})x(s_{i,k_i}+n'_{i,k_i})=\\ &=(r^*_{i,1}+n^*_{i,1})x(s^*_{i,1}+n^{*\prime}_{i,1})+\ldots+(r^*_{i,k_i}+n^*_{i,k_i})x(s^*_{i,k_i}+n'_{i,k_i}).\end{aligned}$$

Покажем, что

(2) $$\langle n_{i,1}, \bar r_{i,1}\rangle\otimes\langle n'_{i,1}, s_{i,1}\rangle+\ldots+\langle n_{i,k_i}, \bar r_{i,k_i}\rangle\otimes\langle n'_{i,k_i}, s_{i,k_i}\rangle=$$
$$=\langle n^*_{i,1}, \bar r^*_{i,1}\rangle\otimes\langle n^{*\prime}_{i,1}, s^*_{i,1}\rangle+\ldots+\langle n^*_{i,k_i}, \bar r^*_{i,k_i}\rangle\otimes\langle n^{*\prime}_{i,k_i}, s^*_{i,k_i}\rangle.$$

Действительно, $(I^*+\mathsf{R})$ и $(I^*+\mathsf{L})$ является лево- и правосторонней унитарной областью полумодуля $((I^*+\bar{\mathsf{R}})\otimes(I^*+\mathsf{L}))^+$:

$$\langle n, r\rangle\Big(\sum_j\langle n_j, \bar r_j\rangle\otimes\langle n'_j, s_j\rangle\Big)\langle n', s\rangle=\sum_j\langle n_j, \bar r_j\rangle\langle n, \bar r\rangle\otimes\langle n_j, s_j\rangle\langle n', s\rangle$$

Так как тождество (1) выпольняется и в полумодуле $((I^*+\bar{\mathsf{R}})\otimes(I^*+\mathsf{L}))^+$, в случае $x=\langle 1, 0\rangle\otimes\langle 1, 0\rangle$ получим равенсво (2).

Обратно, если

(3) $$x\big(\langle n_{i,1}, \bar r_{i,1}\rangle\otimes\langle n'_{i,1}, s_{i,1}\rangle+\ldots+\langle n_{i,k_i}, \bar r_{i,k_i}\rangle\otimes\langle n'_{i,k_i}, s_{i,k_i}\rangle\big)=$$
$$=x\big(\langle n^*_{i,1}, \bar r^*_{i,1}\rangle\otimes\langle n^{*\prime}_{i,1}, s^*_{i,1}\rangle+\ldots+\langle n^*_{i,k_i}, \bar r^*_{i,k_i}\rangle\otimes\langle n^{*\prime}_{i,k_i}, s^*_{i,k_i}\rangle\big),$$

тогда

(4) $$(r_{i,1}+n_{i,1})x(s_{i,1}+n'_{i,1})+\ldots+(r_{i,k_i}+n_{i,k_i})x(s_{i,k_i}+n'_{i,k_i})=$$
$$=(r^*_{i,1}+n^*_{i,1})x(s^*_{i,1}+n^{*\prime}_{i,1})+\ldots+(r^*_{i,k_i}+n^*_{i,k_i})x(s^*_{i,k_i}+n^{*\prime}_{i,k_i}).$$

Действительно, если полугруппы всех полумодулей класса ${}^{\mathsf{R}}\mathfrak{N}^{\mathsf{L}}$ снабдить естественным образом областью правых унитарных операторов $(I^*+\bar{\mathsf{R}})\otimes\otimes(I^*+\mathsf{L})$, то из тождества (3) получим (4).

При отображении φ тождества класса ${}^{\mathsf{R}}\mathfrak{N}^{\mathsf{L}}$ и только они переходят в тождества класса $\mathfrak{N}_1^{(I^*+\bar{\mathsf{R}})\otimes(I^*+\mathsf{L})}$. Это показывается опять таким же образом, как при доказательстве в теореме 1 работы [1].

В случае бимодулей аналогично получится

Теорема 4.2. *Примитивный класс ${}^{\mathsf{R}}\mathfrak{M}^{\mathsf{L}}$ эквивалентен примитивному классу $\mathfrak{M}_1^{(I+\bar{\mathsf{R}})\otimes(I+\mathsf{L})}$ $({}^{\mathsf{R}}\mathfrak{M}^{\mathsf{L}}\sim\mathfrak{M}_1^{(I+\bar{\mathsf{R}})\otimes(I+\mathsf{L})})$.*

§ 5

Обозначим через $\mathfrak{N}$ примитивный класс алгебр, удовлетворяющий условиям I и II.

Теорема 5.1. *Примитивный класс $\mathfrak{N}$ является эквационально полным тогда и только тогда, если он эквивалентен примитивному классу всех унитарных полумодулей над полукольцом R с единицей, обладующим лишь тривиальными конгруэнциями.*

Доказательство. По лемме 2.1 примитивные подклассы класса $\mathfrak{N}$ можно поставить в взаимно однозначное соответствие конгруэнциям полукольца R. При этом $\mathfrak{N}$ соответствует конгруэнции $\mathfrak{C}_0$, а примитивный подкласс 0, содержащий лишь одноэлементную алгебру, — конгруенции $\mathfrak{C}_1$.

Добавим к множеству $\Lambda(\mathfrak{N})$ произвольное новое тождество. Полученное множество тождеств определит некоторый примитивный подкласс класса $\mathfrak{N}$. Конгруэнция полукольца R, соответствующая этому подклассу, отлична от $\mathfrak{C}_0$ и по условию совпадает с $\mathfrak{C}_1$. Отсюда видно, что единственным примитивным подклассом класса $\mathfrak{N}$ является 0. Необходимость же условия теоремы очевидно.

Аналогично доказывается

Теорема 5.2. Примитивный класс $\mathfrak{A}$ абелевых Ω-групп является эквационально полным тогда и только тогда, если он еквивалентен примитивному классу всех правых унитарных модулей над некоторым простым кольцом R с единицей.

Мы видели, что $\mathfrak{M}^{\mathsf{R}} \sim \mathfrak{M}_1^{(I+\mathsf{R})}$. Но кольцо $(I+\mathsf{R})$ никогда не является простым, так что имеет место

Следствие 5.1. Примитивный класс всех правых модулей над кольцом R не может быть эквационально полным.

Наконец, из простоты полей вытекает

Следствие 5.2. Всякий примитивный класс векторных пространств является эквационально полным.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Чакань, Об эквивалентности некоторых классов алгебраических систем, *Acta Sci. Math.*, **23** (1962), 46—57.

[2] ———, Примитивные классы алгебр, эквивалентные классам полумодулей и модулей, *Acta Sci. Math.*, **24** (1963), 157—164.

[3] А. А. Терехов, Об алгебрах с совпадающими прямыми и свободными произведениями, Уч. зап. Ивановского Гос. Пед. Ин-та, **18** (1958), 61—66.

[4] N. Jacobson, *Structure of rings* (Providence, 1956).

[5] J. Higgins, Groups with multiple operators, *Proc. London Math. Soc.*, **6** (1956), 366—416.

[6] J. Kalicki—D. Scott, Equational completeness of abstract algebras, *Proc. Acad. Amsterdam*, **5** (1955), 650—659.

[7] A. Kertész, Vizsgálatok az operátormodulusok elméletében, I, *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.*, **4** (1958), 411—437.

[8] L. Rédei, *Algebra* I (Budapest, 1954).

(Поступило 26/III/1962 г.)